

$$e_{\rm crit} \approx 1 - \frac{2}{\beta} \left(\frac{M_{\rm BH}}{n_*} \right)^{-1/3}$$